Mécanique des Solides

Durée 1h30

Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Effet "rétro" au billard

Une boule homogène de centre G, de masse m et de rayon R, se déplace sur un tapis de billard modélisé par un plan horizontal, fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ muni du repère (O, x, y, z) représenté sur la Figure 1. Le contact entre la boule et le tapis est ponctuel et il existe un coefficient de frottement μ supposé constant entre la boule et le tapis. Par une action appropriée que l'on étudiera pas ici, la boule est lancée avec une vitesse angulaire initiale $\vec{\Omega}(t = 0) = \Omega_0\,\vec{e}_z$ et une vitesse initiale $\vec{v}_G(t = 0) = v_0\,\vec{e}_x$ avec $\Omega_0 > 0$ et $v_0 > 0$.

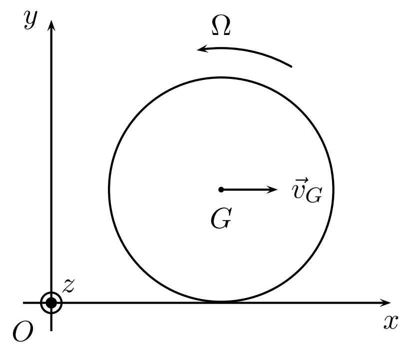

Figure 1

Par ailleurs, on rappelle que le moment d'inertie d'une boule homogène par rapport à un quelconque diamètre vaut $I = (2/5)mR^2$. On notera aussi $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1) Montrer que la boule glisse à l'instant $t = 0$ et préciser le sens de la vitesse de glissement.

2) On fait l'hypothèse (raisonnable) que le glissement perdure pour $t > 0$. On note $\vec{v}_G(t) = v(t)\,\vec{e}_x$ la vitesse du centre de masse de la boule et $\vec{\Omega}(t) = \Omega(t)\,\vec{e}_z$ sa vitesse angulaire.

- **a)** Énoncer les lois de Coulomb du frottement solide dans le cas général et les appliquer dans la situation présente.
- **b)** Appliquer les théorèmes généraux à la boule pour en déduire deux équations différentielles, l'une portant sur $\Omega(t)$ et l'autre sur $v(t)$.
- **c)** Intégrer ces deux équations et démontrer que la vitesse de glissement s'écrit à l'instant t

$$v_g(t) = v_0 + R\Omega_0 - \frac{7}{2}\mu g\,t$$

- **d)** À quel instant t_1 le glissement de la boule cesse ? Calculer $v_1 = v(t_1)$ et $\Omega_1 = \Omega(t_1)$.

3) Étudier le mouvement de la boule pour $t > t_1$.

4) À quelle condition sur v_0, Ω_0 et R la boule "revient en arrière", c'est-à-dire possède une vitesse $\vec{v}_G$ orientée selon $-\vec{e}_x$?

Exercice 2 : Étude d'un pendule articulé

On considère un système articulé constitué de quatre tiges identiques, homogènes de masse m, de longueur ℓ et de rayon négligeable et formant un losange $ABDC$ comme indiqué sur la Figure 2. Les liaisons pivots en A, B, C et D sont parfaites. La tige AB est maintenue horizontale et fixe dans un référentiel galiléen, le reste du losange peut osciller dans un plan vertical. On repère sa position par l'angle θ que fait la tige AC avec la verticale ascendante (Az). On notera $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.
On donne le moment d'inertie d'une tige homogène par rapport à un axe perpendiculaire à la tige passant par une de ses extrêmités : $I = (1/3)m\ell^2$.

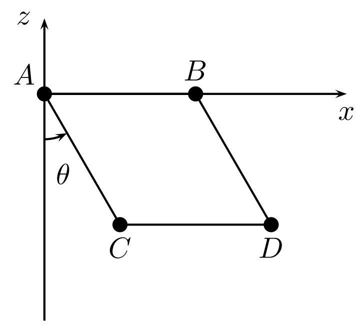

Figure 2

1) Déterminer l'expression de la vitesse des points C et D dans le référentiel considéré en fonction de ℓ et $\dot{\theta} = d\theta/dt$.
Quelle est la nature du mouvement de la tige CD ? Justifier.
En déduire l'expression de son énergie cinétique.

2) Calculer l'énergie cinétique des tiges AC et BD.

3) Après avoir précisé les coordonnées du centre de masse du système, calculer l'énergie potentielle de pesanteur du losange articulé.

4) Vérifier alors que l'énergie mécanique du losange dans le référentiel d'étude s'écrit à une constante additive près

$$E_m = \frac{5}{6}m\ell^2\,\dot{\theta}^2 - 2mg\ell\,\cos\theta.$$

5) Déduire l'équation différentielle du mouvement et donner l'expression de la période des petits mouvements du pendule.